

CORSO DI STATICA E SCIENZA DELLE COSTRUZIONI

A.A. 2023-2024

Esame scritto del 09.01.2024

Parte 1 - Testo 1

Nota: I risultati numerici vanno riportati a penna su questo stesso foglio, nei riquadri predisposti; i calcoli (in forma ordinata) vanno allegati sui soli fogli a quadretti che sono stati forniti. Esprimere i risultati in forma frazionaria o con almeno 3 cifre decimali.

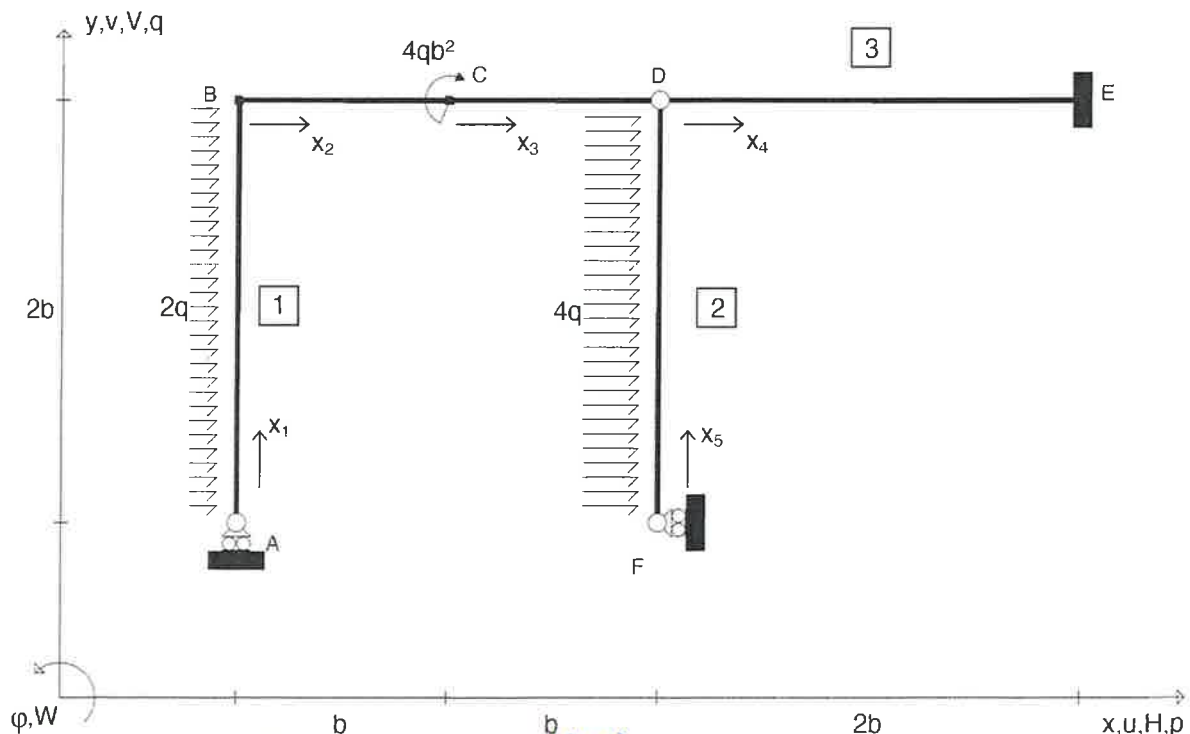
Allievo:.....e-mail:..... Matricola:.....

Esercizio n. 1 (17 punti)

Risolvere la struttura isostatica riportata in Figura calcolando le reazioni vincolari, le *equazioni* delle azioni interne e tracciando nello spazio predisposto nella pagina a fronte i corrispondenti grafici. Si rammenta che il diagramma del momento flettente va riportato dalla parte delle fibre tese.

Universita' di Cagliari

SdC_SdA 09.01.24*001



Eq. ausiliarie

$$\begin{cases} M_{z(D)}^{(1)} = 0 \text{ oppure } M_{z(p)}^{(2+3)} = 0 \\ M_{z(D)}^{(2)} = 0 \text{ oppure } M_{z(D)}^{(1+3)} = 0 \end{cases}$$

Per la struttura, indicata in Figura, determinare la reazione vincolare M_A applicando il principio dei lavori virtuali (PLV). Si richiede di

- Calcolare poi, *riapplicando* il PLV, il valore del momento flettente nel punto D, M_D .

4. Tracciare nel grafico predisposto la spostata rigida corrispondente agli spostamenti virtuali che la struttura può subire;

- Nota: Nel caso di punti impropri, si indichino le coordinate dei centri di rotazione in questa forma:
 (∞, m) , dove m è il coefficiente angolare della retta a cui appartiene il punto improprio.

SdC SdA Esame scritto 09.01.2024, Parte 1 - Testo 1, pag.2

$$M_A(\hat{\varphi}) = 25qb^2; C_1 = (0, 2b); C_2 = (0, 0); C_{12} = (4b, 6);$$

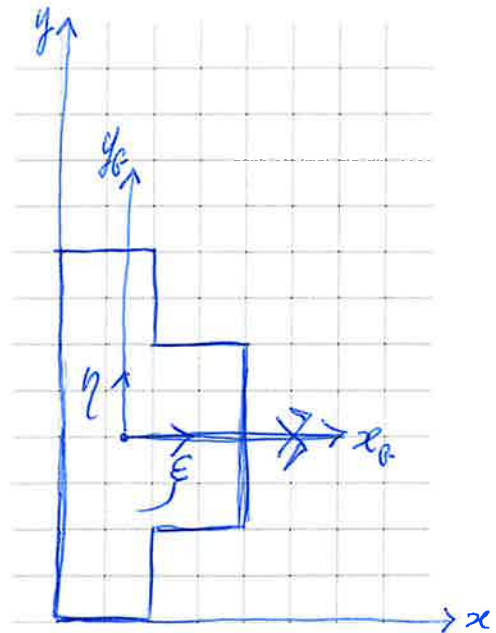
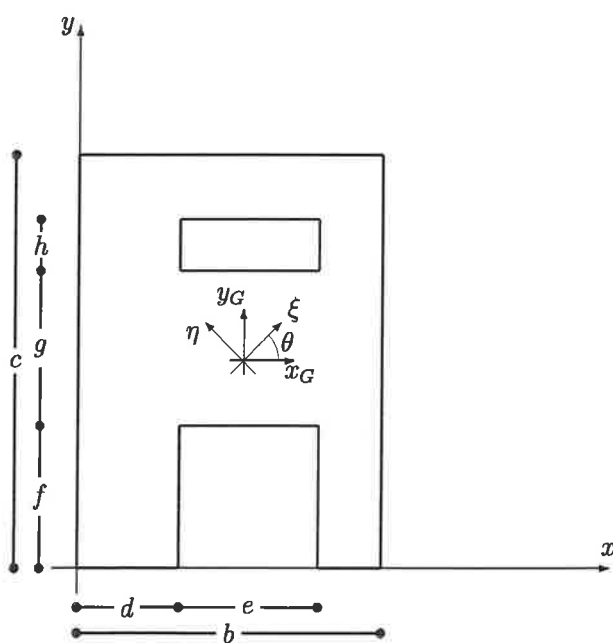
$$u_C = -68q_1; v_B = -468q_1;$$

$$M_D(\hat{\varphi}) = 0; u_C = 0; v_E = +268q_1;$$

Esercizio n. 3 (5 punti)

Per la lamina piana omogenea rappresentata in Figura (NB: Si noti che il disegno non è in scala!) nella quale le misure quotate sono le seguenti: $b = 4a$; $c = 8a$; $d = 2a$; $e = 2a$; $f = 2a$; $g = 4a$; $h = 2a$ si richiede di:

- calcolare i momenti statici, S_x e S_y (rispetto agli assi x e y indicati);
- calcolare le coordinate del baricentro x_G e y_G rispetto ai medesimi assi;
- calcolare i momenti di inerzia J_{xG} e J_{yG} e il momento centrifugo J_{xGyG} rispetto agli assi baricentrici;
- calcolare i momenti centrali d'inerzia, $J_\xi = J_{\max}$ e $J_\eta = J_{\min}$ rispetto agli assi centrali d'inerzia, ξ , η ;
- calcolare la tangente trigonometrica, $\tan 2\theta$, del doppio dell'angolo θ formato dagli assi x_G e ξ .



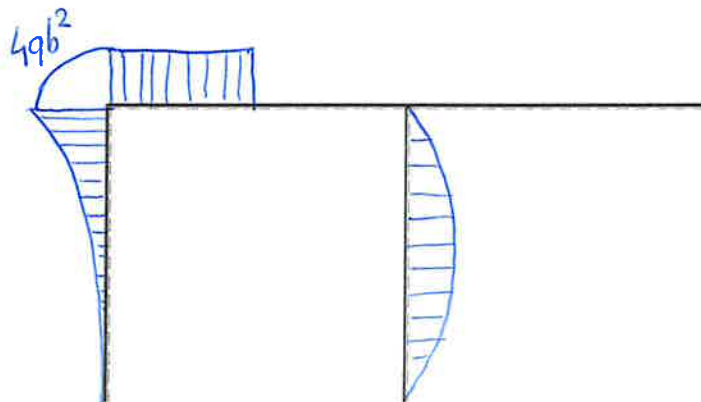
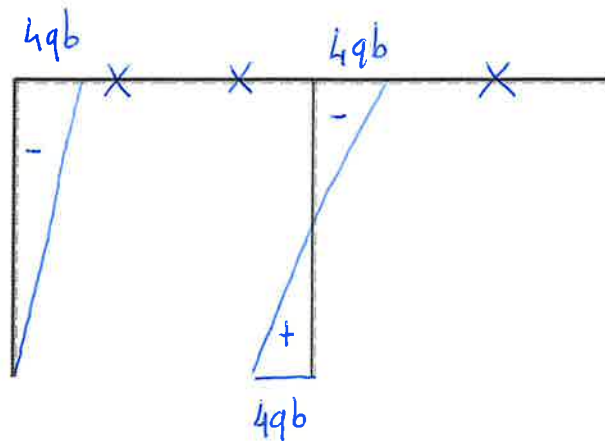
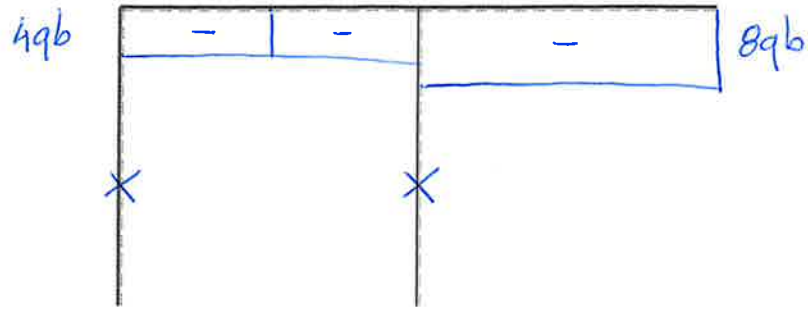
$$S_x = 96a^3; S_y = 40a^3;$$

$$x_G = \frac{5}{3}a = 1.6667a; y_G = 4a;$$

$$J_{xG} = 96a^4; J_{yG} = \frac{88}{3}a^4 = 29.3333a^4;$$

$$J_{xGyG} = 0; \tan 2\theta = 0;$$

$$J_\xi = J_{\max} = 96a^4; J_\eta = J_{\min} = \frac{88}{3}a^4;$$



$$\begin{aligned}
 V_A(\hat{v}) &= 0; & H_F(\Rightarrow) &= -4qb; & H_E(\Rightarrow) &= -8qb; & V_E(\hat{v}) &= 0; & M_E(\hat{\phi}) &= 0; \\
 N_{AB} &= 0; & T_{AB} &= -2qx_1; & M_{AB} &= -qx_1^2; \\
 N_{BC} &= -4qb; & T_{BC} &= 0; & M_{BC} &= -4qb^2; \\
 N_{CD} &= -4qb; & T_{CD} &= 0; & M_{CD} &= 0; \\
 N_{DE} &= -8qb; & T_{DE} &= 0; & M_{DE} &= 0; \\
 N_{FD} &= 0; & T_{FD} &= 4qb - 4qx_5; & M_{FD} &= 4qb x_5 - 2qx_5^2;
 \end{aligned}$$

CORSO DI STATICA E SCIENZA DELLE COSTRUZIONI

A.A. 2023-2024

Esame scritto del 09.01.2024

Parte 1 - Testo 2

Nota: I risultati numerici vanno riportati a penna su questo stesso foglio, nei riquadri predisposti; i calcoli (in forma ordinata) vanno allegati sui soli fogli a quadretti che sono stati forniti. Esprimere i risultati in forma frazionaria o con almeno 3 cifre decimali.

Allievo:.....e-mail:..... Matricola:.....

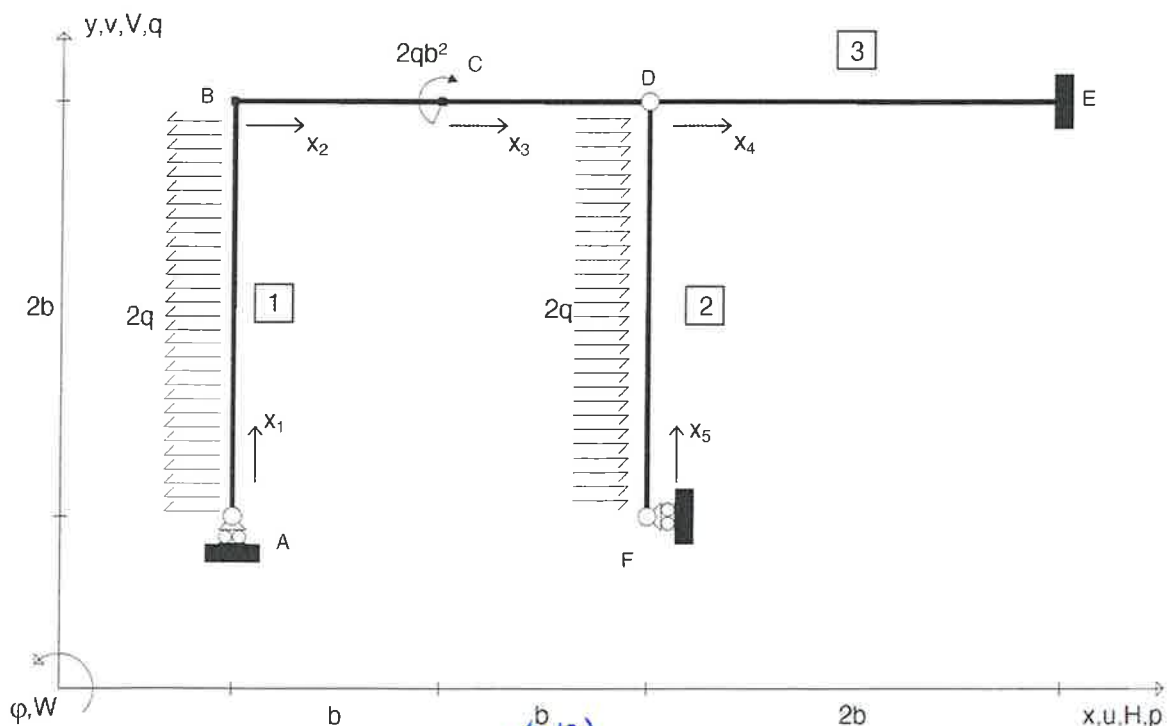
Esercizio n. 1 (17 punti)

Risolvere la struttura isostatica riportata in Figura calcolando le reazioni vincolari, le *equazioni* delle azioni interne e tracciando nello spazio predisposto nella pagina a fronte i corrispondenti grafici.

Si rammenta che il diagramma del momento flettente va riportato dalla parte delle fibre tese.

Universita' di Cagliari

SdC_SdA 09.01.24*002



Eq. ausiliarie

$$\begin{cases} M_{z(D)}^{(1)} = 0 \\ M_{z(D)}^{(2)} = 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} M_{z(D)}^{(2+3)} = 0 \\ M_{z(D)}^{(1+3)} = 0 \end{cases}$$

Esercizio n. 2 (11 punti)

Per la struttura, indicata in Figura, determinare la reazione vincolare M_A applicando il principio dei lavori virtuali (PLV). Si richiede di

1. Determinare le coordinate (riferite all'origine) del centro di istantanea rotazione assoluto del corpo 1 (asta ABC), C_1 , del centro di istantanea rotazione assoluto del corpo 2 (asta CD), C_2 , del centro di istantanea rotazione relativo fra i due corpi, C_{12} ;
2. Tracciare nel grafico predisposto la spostata rigida corrispondente agli spostamenti virtuali che la struttura può subire;
3. Valutare, in funzione dell'ampiezza dell'atto di moto, la componente orizzontale dello spostamento virtuale del punto C , u_C , e quella verticale dello spostamento virtuale del punto B , v_B .

Calcolare poi, riapplicando il PLV, il valore del momento flettente nel punto D , M_D .

In questa situazione (nella quale la struttura è suddivisa nelle tre aste AB , BC , CD) si richiede di:

4. Tracciare nel grafico predisposto la spostata rigida corrispondente agli spostamenti virtuali che la struttura può subire;
5. Valutare, in funzione dell'ampiezza dell'atto di moto, la componente orizzontale dello spostamento virtuale del punto C , u_C , e quella verticale dello spostamento virtuale del punto E , v_E .

Nota: Nel caso di punti impropri, si indichino le coordinate dei centri di rotazione in questa forma: (∞, m) , dove m è il coefficiente angolare della retta a cui appartiene il punto improprio.

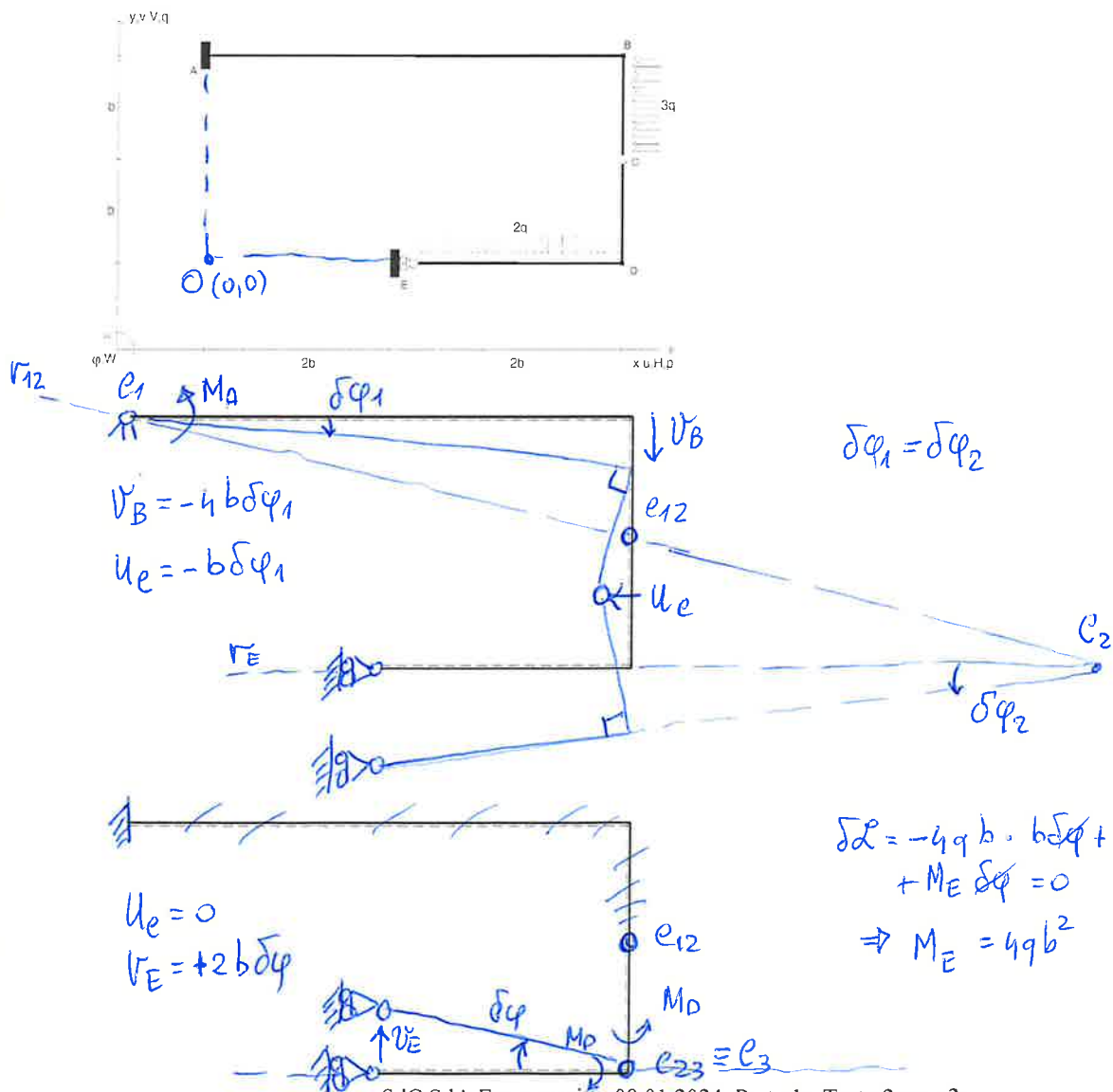
Università di Cagliari

SdC SdA 09.01.24*005

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} &= 3qb \cdot \frac{b}{2} \delta \varphi_1 + \\ &+ 4qb \cdot 5b \delta \varphi_1 + \\ &- M_A \delta \varphi_1 = 0 \\ \Rightarrow M_A &= \frac{3}{2} qb^2 + 20qb^2 \\ &- \frac{4^3}{2} qb^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_1 &\equiv A \\ C_2 &\in r_E \\ C_{12} &\equiv C \\ C_1 &\leftrightarrow C_{12} \leftrightarrow C_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_3 &\in r_E \\ C_{12} &\leftrightarrow C_{23} \leftrightarrow C_3 \\ C_3 &\equiv C_{23} \equiv D \end{aligned}$$



$$M_A(\varphi) = \frac{43}{2} qb^2; C_1 = (0, 2b); C_2 = (8b, 0); C_{12} = (4b, b);$$

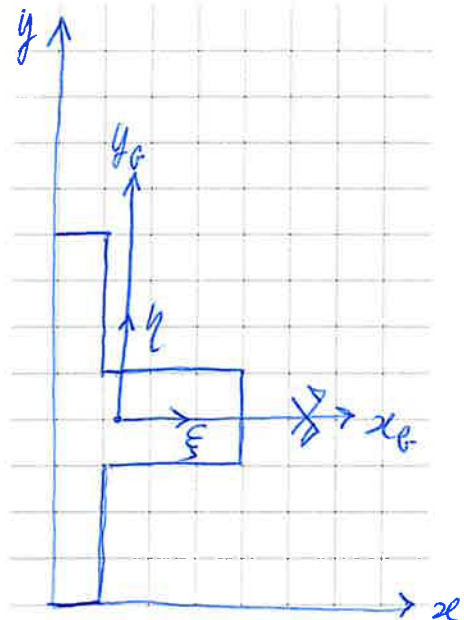
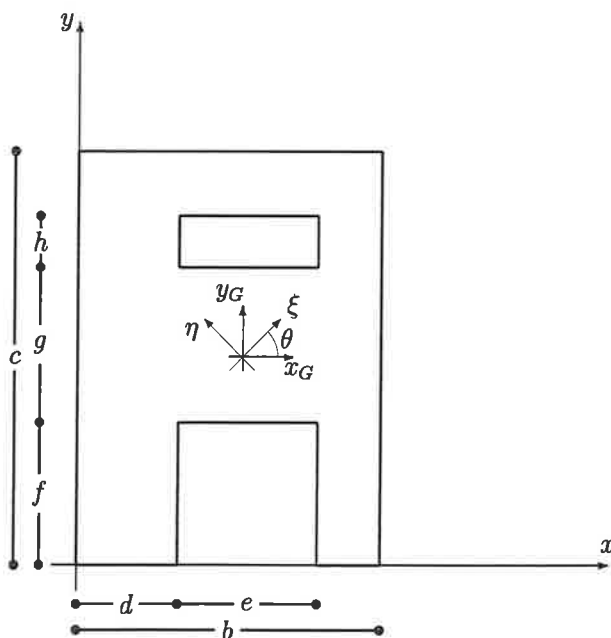
$$u_C = -b\delta\varphi_1; v_B = -4b\delta\varphi_1;$$

$$M_D(\varphi) = 4qb^2; u_C = 0; v_E = +2b\delta\varphi;$$

Esercizio n. 3 (5 punti)

Per la lamina piana omogenea rappresentata in Figura (NB: Si noti che il disegno non è in scala!) nella quale le misure quotate sono le seguenti: $b = 4a$; $c = 8a$; $d = 1a$; $e = 3a$; $f = 3a$; $g = 2a$; $h = 3a$ si richiede di:

- calcolare i momenti statici, S_x e S_y (rispetto agli assi x e y indicati);
- calcolare le coordinate del baricentro x_G e y_G rispetto ai medesimi assi;
- calcolare i momenti di inerzia J_{xG} e J_{yG} e il momento centrifugo J_{xGyG} rispetto agli assi baricentrici;
- calcolare i momenti centrali d'inerzia, $J_\xi = J_{\max}$ e $J_\eta = J_{\min}$ rispetto agli assi centrali d'inerzia, ξ , η ;
- calcolare la tangente trigonometrica, $\tan 2\theta$, del doppio dell'angolo θ formato dagli assi x_G e ξ .



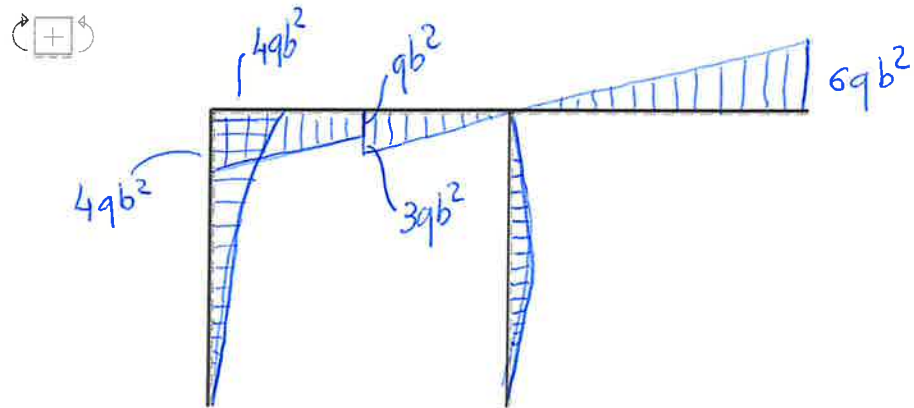
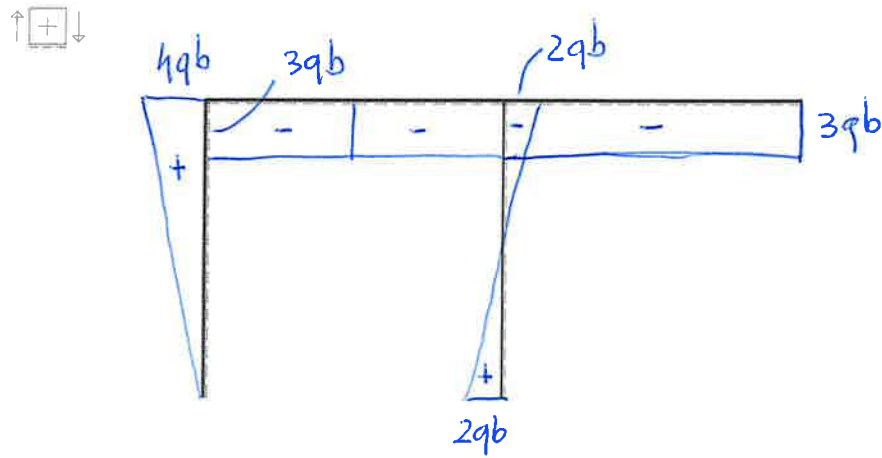
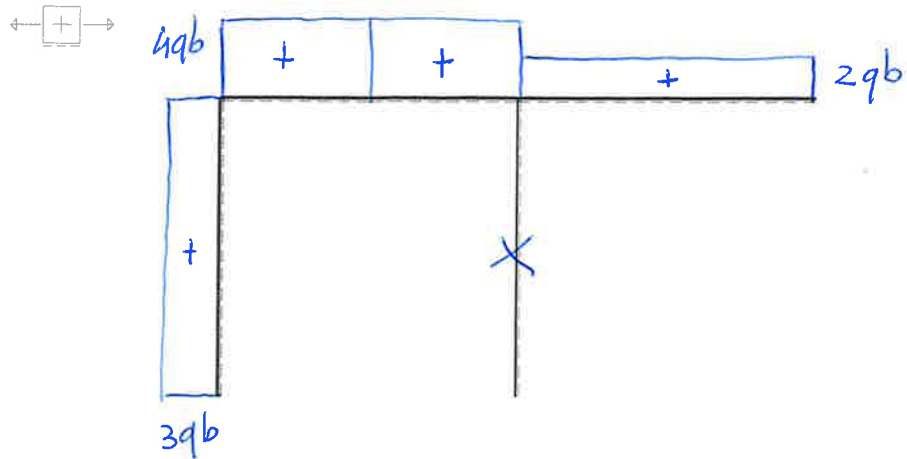
$$S_x = 56a^3; S_y = 19a^3;$$

$$x_G = \frac{19}{14}a = 1.3571a; y_G = 4a;$$

$$J_{xG} = \frac{134}{3}a^4 = 44.6667a^4; J_{yG} = \frac{793}{42}a^4 = 18.8810a^4;$$

$$J_{xGyG} = 0; \tan 2\theta = 0;$$

$$J_\xi = J_{\max} = \frac{134}{3}a^4; J_\eta = J_{\min} = \frac{793}{42}a^4;$$



$V_A (\uparrow) = -3qb$	$H_F (\Rightarrow) = -2qb$	$H_E (\Rightarrow) = 2qb$	$V_E (\uparrow) = 3qb$	$M_E (\curvearrowright) = -6qb^2$
$N_{AB} = 3qb$	$T_{AB} = 2qx_1$	$M_{AB} = qx_1^2$		
$N_{BC} = 2qb$	$T_{BC} = -3qb$	$M_{BC} = 4qb^2 - 3qb x_2$		
$N_{CD} = 4qb$	$T_{CD} = -3qb$	$M_{CD} = 3qb^2 - 3qb x_3$		
$N_{DE} = 2qb$	$T_{DE} = -3qb$	$M_{DE} = -3qb x_4$		
$N_{FD} = 0$	$T_{FD} = 2qb - 2qx_5$	$M_{FD} = 2qb x_5 - qx_5^2$		

CORSO DI STATICA E SCIENZA DELLE COSTRUZIONI

A.A. 2023-2024

Esame scritto del 09.01.2024

Parte 1 - Testo 3

Nota: I risultati numerici vanno riportati a penna su questo stesso foglio, nei riquadri predisposti; i calcoli (in forma ordinata) vanno allegati sui soli fogli a quadretti che sono stati forniti. Esprimere i risultati in forma frazionaria o con almeno 3 cifre decimali.

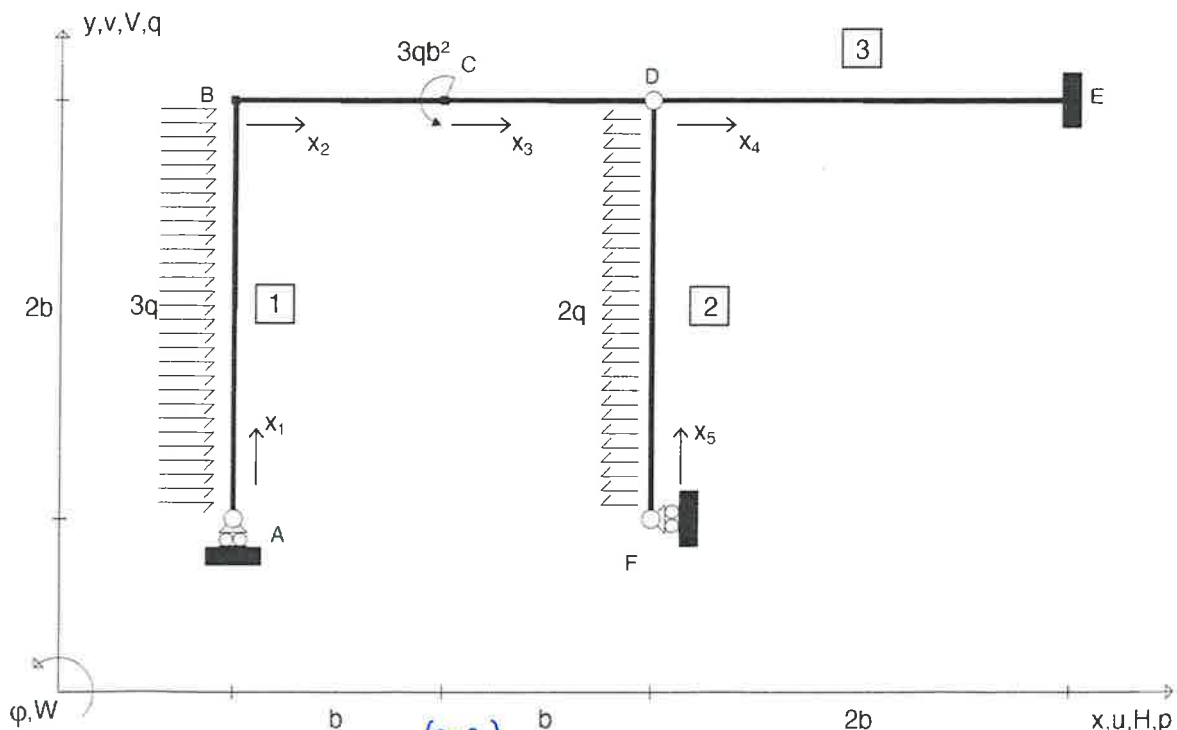
Allievo:.....e-mail:..... Matricola:.....

Esercizio n. 1 (17 punti)

Risolvere la struttura isostatica riportata in Figura calcolando le reazioni vincolari, le equazioni delle azioni interne e tracciando nello spazio predisposto nella pagina a fronte i corrispondenti grafici. Si rammenta che il diagramma del momento flettente va riportato dalla parte delle fibre tese.

Universita' di Cagliari

SdC_SdA 09.01.24*003



Eq. ausiliarie

$$\begin{cases} M_{z(D)}^{(1)} = 0 \text{ oppure } M_{z(D)}^{(2+3)} = 0 \\ M_{z(D)}^{(2)} = 0 \text{ oppure } M_{z(D)}^{(1+3)} = 0 \end{cases}$$

Esercizio n. 2 (11 punti)

Per la struttura, indicata in Figura, determinare la reazione vincolare M_A applicando il principio dei lavori virtuali (PLV). Si richiede di

1. Determinare le coordinate (riferite all'origine) del centro di istantanea rotazione assoluto del corpo 1 (asta ABC), C_1 , del centro di istantanea rotazione assoluto del corpo 2 (asta CD), C_2 , del centro di istantanea rotazione relativo fra i due corpi, C_{12} ;
2. Tracciare nel grafico predisposto la spostata rigida corrispondente agli spostamenti virtuali che la struttura può subire;
3. Valutare, in funzione dell'ampiezza dell'atto di moto, la componente orizzontale dello spostamento virtuale del punto C , u_C , e quella verticale dello spostamento virtuale del punto B , v_B .

Calcolare poi, riapplicando il PLV, il valore del momento flettente nel punto D , M_D .

In questa situazione (nella quale la struttura è *suddivisa nelle tre aste* AB , BC , CD) si richiede di:

4. Tracciare nel grafico predisposto la spostata rigida corrispondente agli spostamenti virtuali che la struttura può subire;
5. Valutare, in funzione dell'ampiezza dell'atto di moto, la componente orizzontale dello spostamento virtuale del punto C , u_C , e quella verticale dello spostamento virtuale del punto E , v_E .

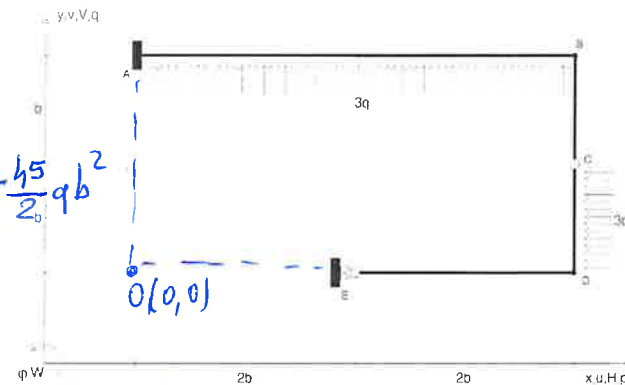
Nota: Nel caso di punti impropri, si indichino le coordinate dei centri di rotazione in questa forma: (∞, m) , dove m è il coefficiente angolare della retta a cui appartiene il punto improprio.

$$\begin{aligned}\delta \mathcal{L} = & -12qb \cdot 2b \delta \varphi_1 + \\ & + 3qb \cdot b/2 \delta \varphi_1 + \\ & - M_A \cdot \delta \varphi_1 = 0\end{aligned}$$

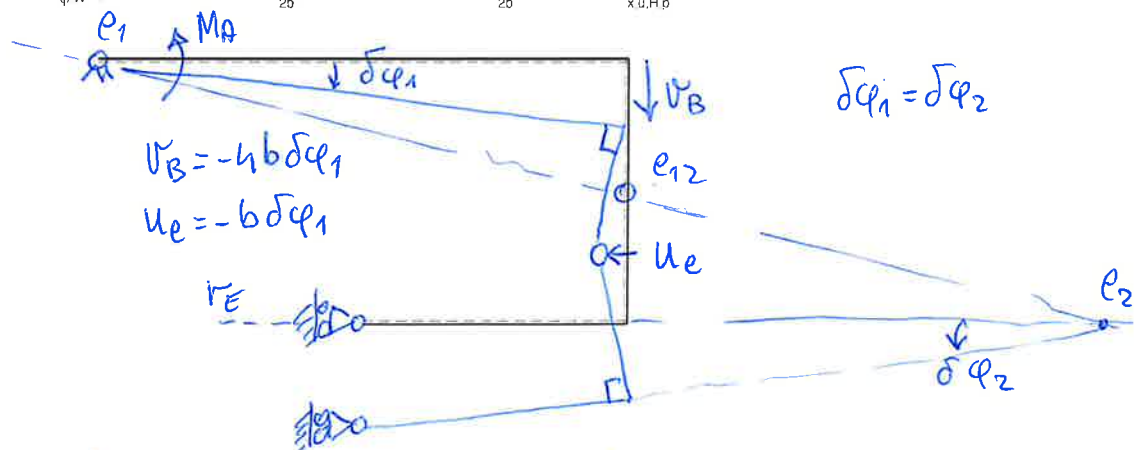
$$\Rightarrow M_A = -24qb^2 + \frac{3}{2}qb^2 = -\frac{45}{2}qb^2$$

Università di Cagliari

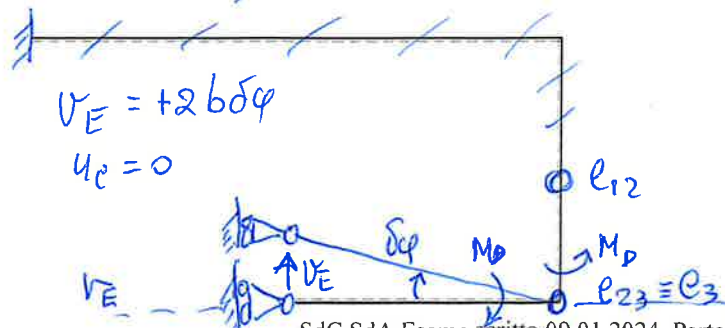
SdC SdA 09 01 24*006



$$\begin{aligned}e_1 & \equiv A \\ e_2 & \in r_E \\ e_{12} & \equiv C \\ e_1 & \leftrightarrow e_{12} \leftrightarrow e_2\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}e_3 & \in r_E \\ e_{12} & \leftrightarrow e_{23} \leftrightarrow e_3 \\ e_3 & \equiv e_{23} \equiv D\end{aligned}$$



$$M_A (\hat{\varphi}) = -45/2 \, 96^2; C_1 = (0, 26); C_2 = (86, 0); C_{12} = (46, 6);$$

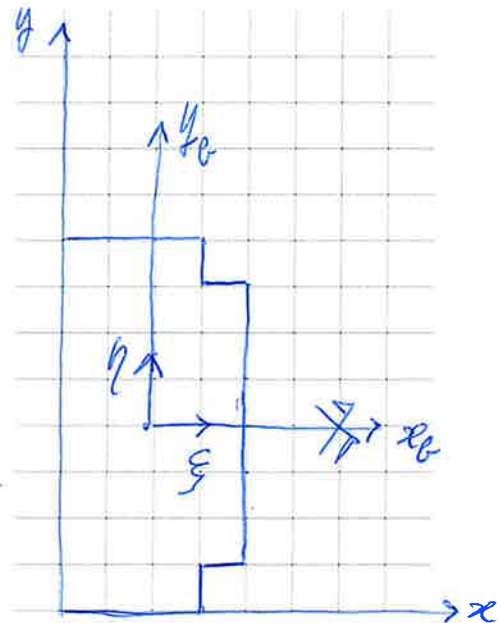
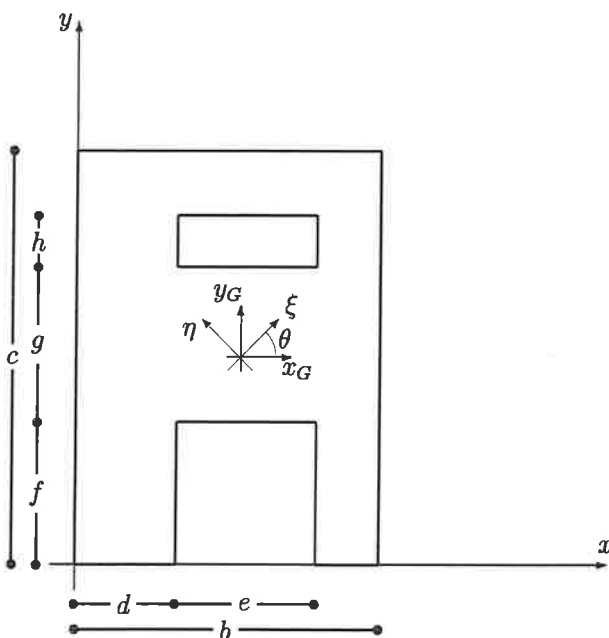
$$u_C = -6841; v_B = -46541;$$

$$M_D (\hat{\varphi} \square \hat{\varphi}) = 0; u_C = 0; v_E = +2654;$$

Esercizio n. 3 (5 punti)

Per la lamina piana omogenea rappresentata in Figura (NB: Si noti che il disegno non è in scala!) nella quale le misure quotate sono le seguenti: $b = 4a$; $c = 8a$; $d = 3a$; $e = 1a$; $f = 1a$; $g = 6a$; $h = 1a$ si richiede di:

- calcolare i momenti statici, S_x e S_y (rispetto agli assi x e y indicati);
- calcolare le coordinate del baricentro x_G e y_G rispetto ai medesimi assi;
- calcolare i momenti di inerzia J_{xG} e J_{yG} e il momento centrifugo J_{xGyG} rispetto agli assi baricentrici;
- calcolare i momenti centrali d'inerzia, $J_\xi = J_{\max}$ e $J_\eta = J_{\min}$ rispetto agli assi centrali d'inerzia, ξ , η ;
- calcolare la tangente trigonometrica, $\tan 2\theta$, del doppio dell'angolo θ formato dagli assi x_G e ξ .



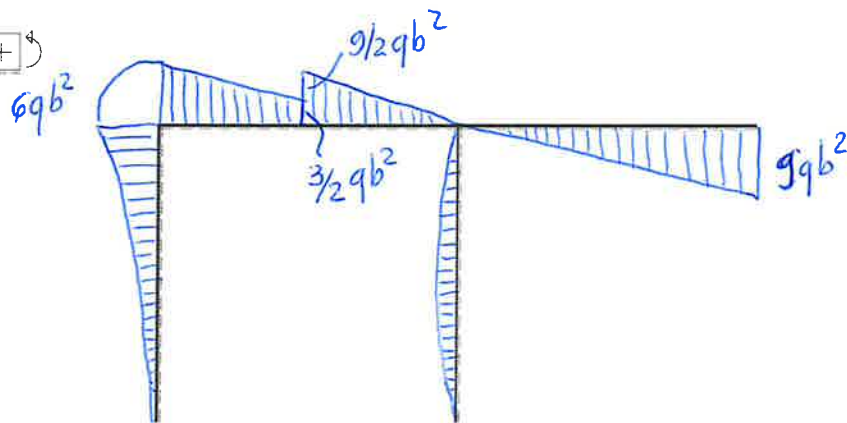
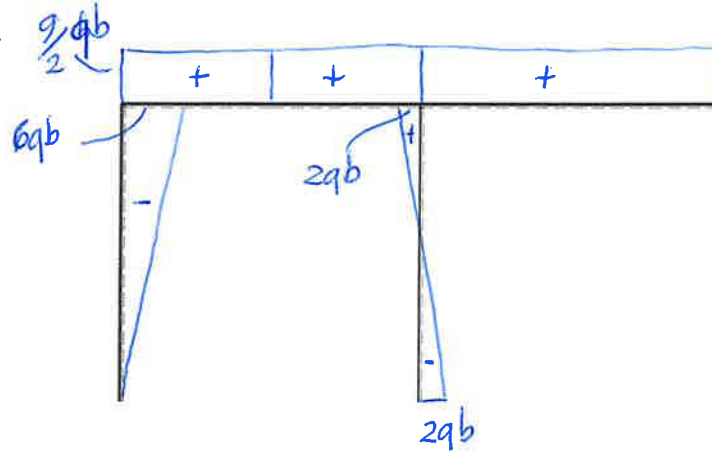
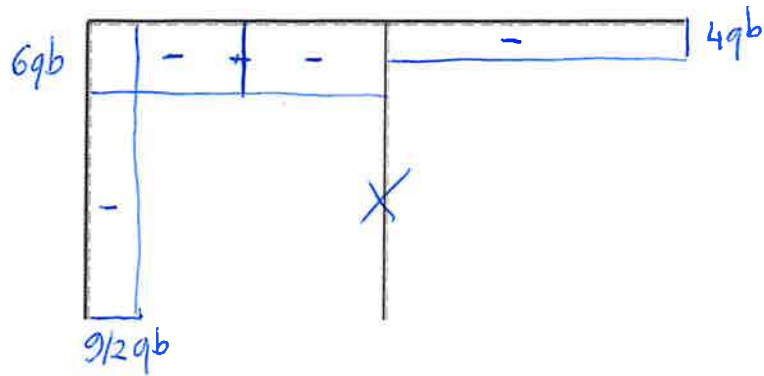
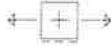
$$S_x = 120 \, a^3; S_y = 57 \, a^3;$$

$$x_G = 10/10 \, a = 1.9000 \, a; y_G = 4 \, a$$

$$J_{xG} = 146 \, a^4; J_{yG} = 377/10 \, a^4 = 37.7000 \, a^4;$$

$$J_{xGyG} = 0; \tan 2\theta = 0;$$

$$J_\xi = J_{\max} = 146 \, a^4; J_\eta = J_{\min} = 377/10 \, a^4$$



$V_A(\hat{u}) = \frac{9}{2}qb$	$H_F(\Rightarrow) = 2qb$	$H_E(\Rightarrow) = -4qb$	$V_E(\hat{u}) = -\frac{9}{2}qb$	$M_E(\hat{\phi}) = 9qb^2$
$N_{AB} = -\frac{9}{2}qb$	$T_{AB} = -3qx_1$	$M_{AB} = -\frac{3}{2}qx_1^2$		
$N_{BC} = -6qb$	$T_{BC} = \frac{9}{2}qb$	$M_{BC} = -6qb^2 + \frac{9}{2}qb x_2$		
$N_{CD} = -6qb$	$T_{CD} = \frac{9}{2}qb$	$M_{CD} = -\frac{9}{2}qb^2 + \frac{9}{2}qb x_3$		
$N_{DE} = -4qb$	$T_{DE} = \frac{9}{2}qb$	$M_{DE} = \frac{9}{2}qb x_4$		
$N_{FD} = 0$	$T_{FD} = -2qb + 2qx_5$	$M_{FD} = -2qb x_5 + qx_5^2$		